Université de Lorraine **année 2012-2013**

Agrégation de Mathématiques

La fonction Gamma dans tout ses états

1 La fonction Gamma : définition et $\Gamma'(1)$

Exercice 1 On note Γ la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par la relation

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}\, dt.$$

Pour n entier naturel non nul, on pose

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

1. Vérifier que Γ est bien définie.
2. Démontrer que la fonction Γ est dérivable sur $]0,+\infty[$, avec
$$\forall x > 0 \quad \Gamma'(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1} \log t\, dt.$$
3. Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par $u_n = H_n - \log n$ admet une limite lorsque n tend vers l'infini. On notera γ cette limite, appelée constante d'Euler.
4. Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, $H_n = \int_0^1 \frac{1-(1-v)^n}{v}\, dv$.
5. En déduire que, pour tout entier naturel $n \geq 1$,
$$\frac{H_{n+1}}{n+1} = -\int_0^1 (1-v)^n \log v\, dv.$$
6. Établir que pour tout $t \geq 0$, $1 - t \leq e^{-t}$.
7. On pose $I_n = \int_0^n (1 - \frac{t}{n})^n \log t\, dt$. Montrer que
$$\lim_{n\to+\infty} I_n = \int_0^{+\infty} e^{-t} \log t\, dt.$$
8. Montrer que $\gamma = -\Gamma'(1)$.
Indication : on pourra montrer que $I_n = \frac{n}{n+1}(\log n - H_{n+1})$.

Solution 1 1. La fonction $t \mapsto e^{-t}t^{x-1}$ est continue sur $]0,+\infty[$, donc localement intégrable sur $]0,+\infty[$. Reste à étudier l'intégrabilité en 0 et en l'infini. En 0, $e^{-t}t^{x-1} \sim t^{x-1}$, et comme $x - 1 > -1$ et que t^{x-1} est de signe constant au voisinage de 0, l'intégrabilité en 0 découle du critère d'équivalence avec une intégrale "de type Riemann" classique. En l'infini, $e^{-t}t^{x-1} = o(e^{-t/2})$, ce qui donne la convergence en l'infini.

2. Soient a, b réels avec $0 < a < b < +\infty$. Pour tout $t > 0$, on a

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(e^{-t}t^{x-1}\right) = e^{-t}t^{x-1}\log t.$$

Comme pour tout $t > 0$ et tout $x \in]a, b[$, on a

$$\begin{aligned} |e^{-t}t^{x-1}\log t| &= (-\log t)e^{-t}t^{x-1}\,\mathbb{1}_{]0,1[}(t) + e^{-t}t^{x-1}\log t\,\mathbb{1}_{[1,+\infty[}(t) \\ &\leq (-\log t)e^{-t}t^{a-1}\,\mathbb{1}_{]0,1[}(t) + e^{-t}t^{b-1}\log t\,\mathbb{1}_{[1,+\infty[}(t), \end{aligned}$$

on pourra appliquer le théorème de dérivation sous le signe intégrale dès qu'il sera acquis que

$$t \mapsto (-\log t)e^{-t}t^{a-1}\,\mathbb{1}_{]0,1[}(t) + e^{-t}t^{b-1}\log t\,\mathbb{1}_{[1,+\infty[}(t)$$

est intégrable sur $]0, +\infty[$.
– Cette fonction est continue, donc localement intégrable.
– En 0, on a $\log t = o(t^{-a/2})$ et $e^{-t} \sim 1$, d'où la relation de comparaison $(-\log t)e^{-t}t^{a-1} = o(t^{a/2-1})$, ce qui donne l'intégrabilité en 0.
– En $+\infty$, comme $\log t = o(t)$, on a $e^{-t}t^{b-1}\log t = o(e^{-t}t^b)$, mais $t^b = o(e^{t/2})$, donc finalement $e^{-t}t^{b-1}\log t = o(e^{-t/2})$, ce qui donne l'intégrabilité en l'infini.

Ainsi, la fonction Γ est dérivable sur $]a, b[$, avec

$$\forall x \in]a, b[\quad \Gamma'(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}\log t\, d\lambda(t).$$

Comme la dérivabilité est une propriété locale et que tout point de $]0, +\infty[$ admet un voisinage de la forme $]a, b[$, avec a, b réels vérifiant $0 < a < b < +\infty$, le résultat s'ensuit.

3. On a le comportement suivant

$$\begin{aligned} |u_n - u_{n-1}| &= |(H_n - H_{n-1}) - (\log n - \log(n-1))| \\ &= \left|\frac{1}{n} + \log(1 - 1/n)\right| = \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right| = O\left(\frac{1}{n^2}\right). \end{aligned}$$

Ainsi la série de terme général $u_n - u_{n-1}$ converge, mais on a la relation télescopique $\sum\limits_{k=2}^{n} (u_n - u_{n-1}) = u_n - u_1$, donc la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ converge.

4. Pour tout $v \in]0, 1[$, on a en posant $u = 1 - v$

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1-(1-v)^n}{v}\, dv &= \int_0^1 \frac{1-u^n}{1-u}\, du = \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{n-1} u^k\right) du \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^1 u^k\, du = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+1} = H_n. \end{aligned}$$

5. On fait une intégration par parties : pour tout $\epsilon > 0$, on a
$$\begin{aligned} & \int_\epsilon^1 (1-v)^n \log v \; dv \\ = \; & [\frac{1-(1-v)^{n+1}}{n+1} \log v]_\epsilon^1 - \frac{1}{n+1} \int_\epsilon^1 \frac{1-(1-v)^{n+1}}{v} \; dv \\ = \; & -\frac{1-(1-\epsilon)^{n+1}}{n+1} \log \epsilon - \frac{1}{n+1} \int_\epsilon^1 \frac{1-(1-v)^{n+1}}{v} \; dv \end{aligned}$$
Cependant, on a l'équivalent en 0 : $-\frac{1-(1-\epsilon)^{n+1}}{n+1} \log \epsilon \sim -\epsilon \log \epsilon$, d'où en faisant tendre ϵ vers 0 :
$$\int_0^1 (1-v)^n \log v \; dv = -\frac{1}{n+1} \int_1^1 \frac{1-(1-v)^{n+1}}{v} \; dv = -\frac{H_{n+1}}{n+1}$$
grâce à la question précédente.
6. La fonction $t \mapsto f(t) = 1 - e^{-t}$ a comme dérivée e^{-t} qui est majorée par 1 sur $\mathbb{R}_+$. D'après l'inégalité des acroissements finis, on a $f(t) - f(0) \leq t$, d'où l'inégalité voulue.
7. Posons, pour $t > 0$ et $n \geq 1$, $f_n(t) = (1 - \frac{t}{n})^n (\log t) \mathbb{1}_{[0,n]}(t)$. Comme f_n est de signe constant et continue par morceaux, on a
$$\int_{]0,+\infty[} f_n(x) \; d\lambda(x) = \int_{]0,n]} f_n(x) \; d\lambda(x) = \int_0^n f_n(t) \; dt = I_n.$$
Pour $n \geq t$, on a $f_n(t) = (1 - \frac{t}{n})^n \log t$.
Mais $(1 - \frac{t}{n})^n = \exp(\log(1 - \frac{t}{n})^n) = \exp(n \log(1 - t/n))$: lorsque n tend vers l'infini $\log(1 - t/n) \sim -t/n$, d'où $n \log(1 - t/n) \sim -t$. Ainsi, $\lim_{n \to +\infty} n \log(1 - t/n) = -t$, d'où $\lim_{n \to +\infty} (1 - t/n)^n = e^{-t}$. Finalement, pour tout $t > 0$, $\lim_{n \to +\infty} f_n(t) = e^{-t} \log t$.
On a pour t compris entre 0 et n
$$\left| \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \log t \right| \leq (e^{-t/n})^n |\log t| = |\log t| e^{-t},$$
d'où $|f_n(t)| \leq |\log t| e^{-t}$. La dernière inégalité est encore vérifiée pour $t > n$: les termes sont tous nuls. Ainsi, on a sur $]0, +\infty[$ l'inégalité $|f_n(t)| \leq |\log t| e^{-t}$. Comme, on l'a vu au 2, cette fonction est intégrable, on peut alors appliquer le théorème de convergence dominée et on a
$$\lim_{n \to +\infty} I_n = \int_0^{+\infty} e^{-t} \log t \; dt.$$

8. Un simple changement de variable affine donne

$$\begin{aligned}
\int_0^n f_n(t)\ dt &= n\int_0^1 f_n(ny)\ dy = n\int_0^1 (1-y)^n \log(ny)\ dy.\\
&= n\log n \int_0^1 (1-y)^n\ dy + n\int_0^1 (1-y)^n \log y\ dy.\\
&= \frac{n\log n}{n+1} - n\frac{H_{n+1}}{n+1},
\end{aligned}$$

soit $I_n = \frac{n}{n+1}(\log n - H_{n+1}) = \frac{n}{n+1}(\log n - H_n - \frac{1}{n+1})$.

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} (H_n - \log n) = \gamma$, cela nous donne $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = -\gamma$. Or, d'après la question précédente, $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = \int_0^{+\infty} e^{-t}\log t\ dt$, qui d'après la question 2, est égale à $\Gamma'(1)$. On obtient donc l'identité $\gamma = -\Gamma'(1)$.

2 Les formules de récurrence

Exercice 2 Montrer que la fonction Γ vérifie, pour tout réel $x > 0$, l'égalité $\Gamma(x+1) = x\cdot\Gamma(x)$. En particulier, vérifier que pour tout entier $n \geq 0$, on a :

$$\Gamma(n+1) = n\,! \quad \text{et} \quad \Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{(2n)\,!}{2^{2n}\cdot n\,!}.$$

Solution 2 On fait une intégration par parties : soit $T > 0$, on a

$$\int_0^T t^x e^{-t}\ dt = [-t^x e^{-t}]_0^T + \int_0^T x t^{x-1} e^{-t}\ dt$$

soit

$$\int_0^T t^x e^{-t}\ dt = -T^x e^{-T} + x\int_0^T t^{x-1} e^{-t}\ dt$$

En faisant tendre T vers l'infini, on obtient $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

Les formules se montrent alors aisément par récurrence.

3 Wallis, Γ(1/2), intégrale de Gauss

Exercice 3 *Intégrales de Wallis.*

1. On pose

$$W_n = \int_0^{\pi/2} (\cos\theta)^n\ d\theta.$$

Montrer que $W_n = \frac{n-1}{n} W_{n-2}$. En déduire que la suite $(nW_nW_{n-1})_{n\geq 1}$ est constante.

2. Montrer que $W_n W_{n+1} \leq W_n^2 \leq W_n W_{n-1}$. En déduire l'équivalent à l'infini
$$W_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}.$$

Solution 3 1. Pour $n \geq 2$, on a

$$\begin{aligned}
W_n &= \int_0^{\pi/2} (\cos\theta)^n \, d\theta \\
&= \int_0^{\pi/2} (1 - (\sin\theta)^2)(\cos\theta)^{n-2} \, d\theta \\
&= W_{n-2} + \int_0^{\pi/2} (\sin\theta)(-\sin\theta(\cos\theta)^{n-2}) \, d\theta \\
&= W_{n-2} + \left[(\sin\theta)\frac{1}{n-1}(\cos\theta)^{n-1}\right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \cos\theta(\cos\theta)^{n-1}\frac{d\theta}{n-1} \\
&= W_{n-2} + 0 - \frac{1}{n-1}W_n,
\end{aligned}$$

d'où $(n-1)W_n = (n-1)W_{n-2} - W_n$, puis $nW_n = (n-1)W_{n-2}$ et $W_n = \frac{n-1}{n}W_{n-2}$. Posons $u_n = nW_nW_{n-1}$: on a pour tout $n \geq 1$,
$$u_n = n\frac{n-1}{n}W_{n-2}W_{n-1} = (n-1)W_{n-1}W_{n-2} = u_{n-1},$$
ce qui montre que la suite est constante.

2. Pour tout $\theta \in [0, \pi/2]$, on a
$$0 \leq (\cos\theta)^{n+1} \leq (\cos\theta)^n \leq (\cos\theta)^{n-1},$$
d'où en intégrant $W_{n+1} \leq W_n \leq W_{n-1}$, puis, en multipliant par W_n : $W_nW_{n+1} \leq W_n^2 \leq W_{n-1}W_n$.
En multipliant par n, il vient $nW_nW_{n+1} \leq nW_n^2 \leq nW_{n-1}W_n$, soit $\frac{n}{n+1}u_{n+1} \leq nW_n^2 \leq u_n$, et comme (u_n) est constante $\frac{n}{n+1}u_1 \leq nW_n^2 \leq u_1$.
D'où $\lim_{n\to+\infty} nW_n^2 = u_1$, $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n}W_n = \sqrt{u_1}$, soit $W_n \sim \sqrt{\frac{u_1}{n}}$. Un calcul simple donne $u_1 = 1.W_1W_0 = 1\frac{\pi}{2}.1 = \frac{\pi}{2}$, d'où le résultat voulu.

Exercice 4 *Calcul de l'intégrale de Gauss.*

1. On pose $J_n = \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \, dt$. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} J_n = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \, dt$.
2. Exprimer J_n en fonction d'une intégrale de Wallis. En déduire la valeur de l'intégrale de Gauss :
$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2/2} \, dt = \frac{1}{2}\sqrt{2\pi} = \sqrt{\pi/2}.$$

Solution 4 1. On a $J_n = \int_{[0,+\infty[}(1-\frac{t^2}{n})^n \mathbb{1}_{[0,\sqrt{n}]}(t)\ d\lambda(t)$. Soit $t \geq 0$. Pour $n \geq t^2$, on a $(1-\frac{t^2}{n})^n \mathbb{1}_{[0,\sqrt{n}]}(t) = (1-\frac{t^2}{n})^n$, or on sait que

$$\log((1-\frac{t^2}{n})^n) = n\log(1-\frac{t^2}{n}) \sim n(-\frac{t^2}{n}) = -t^2,$$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \log((1-\frac{t^2}{n})^n) = -t^2$, d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} (1-\frac{t^2}{n})^n = \exp(-t^2/2)$.
Par ailleurs, on a

$$\forall n \geq 1 \quad t \geq 0 \quad (1-\frac{t^2}{n})^n \mathbb{1}_{[0,\sqrt{n}]}(t) \leq \exp(-t^2/2).$$

En effet, l'inégalité est évidente pour $t \geq \sqrt{n}$, tandis que pour $t \in [0,\sqrt{n}[$, elle découle de l'inégalité :

$$\forall x \in [0,1[\quad -\log(1-x) \geq x,$$

que l'on applique à $x = t^2/n$. Comme e^{-t^2} est intégrable sur $[0,+\infty[$, il suffit alors d'appliquer le théorème de convergence dominée.

2. Avec le changement de variable $u = t/\sqrt{n}$, on a $J_n = \sqrt{n}\int_0^1 (1-u^2)^n\ du$. Posant encore $u = \sin\theta$, on a

$$\int_0^1 (1-u^2)^n\ du = \int_0^{\pi/2} (1-\sin^2\theta)^n \cos\theta\ d\theta = \int_0^{\pi/2} (\cos\theta)^{2n+1}\ d\theta = W_{2n+1},$$

soit $J_n = \sqrt{n}W_{2n+1}$.
Vu le résultat de l'exercice précédent, $J_n \sim \sqrt{n}\sqrt{\frac{\pi}{2(2n+1)}} \sim \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, soit $\lim\limits_{n\to+\infty} J_n = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, d'où $\int_0^{+\infty} \exp(-t^2)\ dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ et, avec un changement de variable $\int_0^{+\infty} \exp(-t^2/2)\ dt = \sqrt{\pi/2}$.

Exercice 5 *Calcul de* $\Gamma(1/2)$.
Connaissant la valeur de l'intégrale de Gauss, montrer que

$$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}.$$

Solution 5 Il suffit de faire le changement de variable $t^2/2 = u$ dans la formule précédente et de relire la définition de la fonction Γ.

4 Formule de Stirling.

Exercice 6 1. Montrer que $\int_{2n}^{+\infty} x^n e^{-x}\ dx = o(\Gamma(n+1))$.

2. Montrer l'équivalent à l'infini $\frac{\Gamma(n+1)}{e^{-n}n^{n+1/2}} \sim \int_{-\sqrt{n}}^{\sqrt{n}} (1+\frac{u}{\sqrt{n}})^n e^{-u\sqrt{n}}\ du$.

3. Montrer que pour tout $x \in]-1,1[$, on a $\log(1+x) - x \leq -\frac{x^2}{6}$.

4. On rappelle que $\int_0^{+\infty} e^{-t^2/2}\ dt = \frac{1}{\sqrt{\pi/2}}$. Montrer que

$$\Gamma(n+1) \sim \sqrt{2\pi} e^{-n} n^{n+1/2}.$$

Solution 6 1. On peut remarquer que

$$\begin{aligned}
\int_{2n}^{+\infty} x^n e^{-x}\ dx = \int_n^{+\infty} (x+n)^n e^{-(n+x)}\ dx &\leq \int_n^{+\infty} (2x)^n e^{-(n+x)}\ dx \\
&= \left(\frac{2}{e}\right)^n \int_n^{+\infty} x^n e^{-x}\ dx \\
&\leq \left(\frac{2}{e}\right)^n \Gamma(n+1)
\end{aligned}$$

2. On vient de montrer que

$$\Gamma(n+1) - \int_0^{2n} x^n e^{-x}\ dx = o(\Gamma(n+1)),$$

donc $\Gamma(n+1) \sim \int_0^{2n} x^n e^{-x}\ dx$. On fait alors quelques changements de variable :

$$\begin{aligned}
&\textstyle\int_0^n x^n e^{-x}\ dx \\
&= \int_{-n}^{n} (x+n)^n e^{-(x+n)}\ dx \\
&= e^{-n} n^n \int_{-n}^{n} (1+\frac{x}{n})^n e^{-x}\ dx \\
&= e^{-n} n^{n+1/2} \int_{-\sqrt{n}}^{+\sqrt{n}} (1+\frac{x}{\sqrt{n}})^n e^{-\sqrt{n}x}\ dx,
\end{aligned}$$

3. pour $x \in]-1,1[$, on a

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} - \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{(-x)^n}{n},$$

pour $x \leq 0$, on a donc $\ln(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2}$, tandis que pour $x > 0$, le critère spécial des séries alternées donne :

$$\ln(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{3} = x - \frac{x^2}{6},$$

4. Posons, pour $x \in]-1,1[$: $\phi(x) = \frac{x-\ln(1+x)}{x^2}$. Comme $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$, ϕ se prolonge par continité avec $\phi(0) = 1/2$. D'après ce qui précède, $\phi(x) \geq 1/6$ pour tout $x \in]-1,1[$ Posons maintenant

$$f_n(y) = \mathbb{1}_{[-\sqrt{n},\sqrt{n}]}(y) e^{-y^2\phi(y/\sqrt{n})}\ dy.$$

On a
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(y)\ dy = \int_{-\sqrt{n}}^{+\sqrt{n}} (1+\frac{x}{\sqrt{n}})^n e^{-\sqrt{n}x}\ dx$$
Or, on a
$$0 \leq f_n(y) \leq \exp(-y^2/6)$$
et $\lim_{n\to+\infty} f_n(y) = e^{-y^2\phi(0)}$. Ainsi, d'après le théorème de convergence dominée
$$\lim_{n\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(y)\ dy = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2/2}\ dy = \sqrt{2\pi}$$
Cela nous donne bien l'équivalent
$$\Gamma(n+1) \sim \sqrt{2\pi}e^{-n}n^{n+1/2}.$$

5 de Γ à ζ

Exercice 7 Pour $s > 1$, on pose
$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}.$$
Montrer que l'on a
$$\zeta(s)\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} t^{s-1}\frac{e^{-t}}{1-e^{-t}}\ dt.$$
Solution 7 Comme $y/(1-y) = \sum_{p\geq 1} y^p$ pour $0 < y < 1$, on a pour tout $t > 0$:
$$t^{s-1}\frac{e^{-t}}{1-e^{-t}} = \sum_{p=1}^{+\infty} t^{s-1}e^{-pt}.$$
Comme la série est à termes positifs, on peut intervertir la série et l'intégrale :
$$\int_0^{+\infty} t^{s-1}\frac{e^{-t}}{1-e^{-t}} = \sum_{p=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} t^{s-1}e^{-pt}\ dt.$$
Cependant
$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} t^{s-1}e^{-pt}\ dt &= \frac{1}{p^s}\int_0^{+\infty} (pt)^{s-1}e^{-pt}\ pdt \\ &= \frac{1}{p^s}\int_0^{+\infty} u^{s-1}e^{-u}\ du \\ &= \frac{1}{p^s}\Gamma(s) \end{aligned}$$
On a donc
$$\int_0^{+\infty} t^{s-1}\frac{e^{-t}}{1-e^{-t}} = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^s}\Gamma(s) = \Gamma(s)\zeta(s).$$